

U. Didáctica 9: Semejanza. Teorema de Tales

RECUERDA

Dos figuras son **semejantes** cuando tienen la misma forma aunque sus dimensiones sean diferentes.

La distancia entre dos puntos cualesquiera de una de ellas dividida entre la distancia entre los dos puntos correspondientes de la otra es constante y se denomina **razón de semejanza**.

Los puntos, lados o ángulos correspondientes también se llaman **homólogos**.

Dos **polígonos** son semejantes cuando sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados, proporcionales.

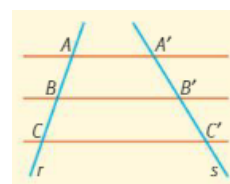
- *Ejemplo:* Los lados de un triángulo miden 2 cm, 3 cm y 4 cm. Halla la medida de los lados de un triángulo semejante al anterior y cuyo lado menor mida 14 cm

$$\text{Cálculo de la razón de semejanza: } k = \frac{14}{2} = 7$$

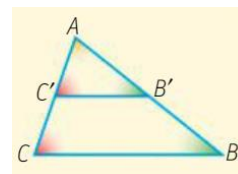
Los otros del lados del segundo triángulo medirán: $3 \cdot 7 = 21$ cm y $4 \cdot 7 = 28$ cm

- **Teorema de Tales:** Si varias rectas paralelas cortan a dos rectas secantes r y s , los segmentos correspondientes determinados por las rectas paralelas sobre r y s son proporcionales.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$



- Dos triángulos están en **posición de Tales** cuando tienen un vértice común y los lados opuestos a ese vértice son paralelos. Los triángulos en posición de Tales son semejantes.



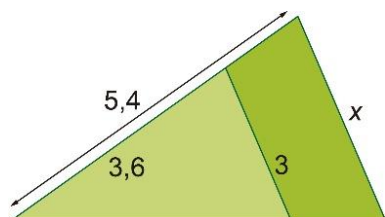
- **Criterios de semejanza para triángulos.**

Para demostrar que dos triángulos son semejantes, es suficiente con comprobar que se cumple alguno de los siguientes criterios.

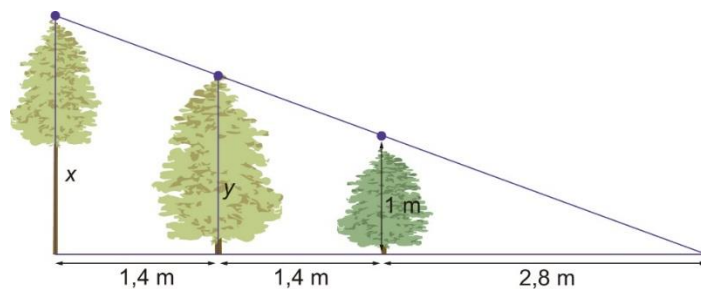
Criterio 1	Criterio 2	Criterio 3
Tienen dos ángulos iguales.	Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que determinan igual.	Tienen los tres lados proporcionales.

Ejercicios

1. Los siguientes triángulos están en posición de Tales. Halla el valor de x .

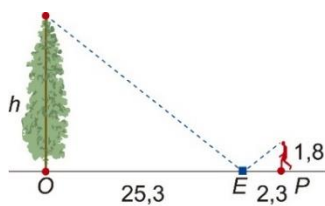


2. Calcula las alturas de los dos árboles sabiendo que los triángulos están en posición de Tales.

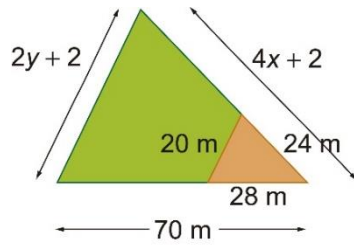


3. Un árbol de 4 m de altura proyecta una sombra de 6 m de longitud. ¿Cuál es la altura de un edificio que proyecta en ese mismo instante una sombra de 18 m ? Haz un esquema gráfico de la situación.

4. Víctor va paseando por el campo y ve reflejado en un charco la punta de un árbol. Si las medidas son las que aparecen en la figura (todas en metros), averigua la altura del árbol.



5. Aplica la semejanza de triángulos para hallar el valor de x e y en la siguiente figura.



6. Utilizando los criterios de semejanza, justifica si los siguientes triángulos son o no semejantes.

a) $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 32^\circ$ y $\hat{A}' = 90^\circ$, $\hat{C}' = 58^\circ$

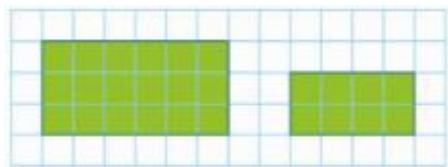
b) $\hat{A} = 72^\circ$, $\overline{AB} = 2$ cm, $\overline{AC} = 6$ cm y $\hat{A}' = 72^\circ$, $\overline{A'B'} = 1$ cm, $\overline{A'C'} = 3$ cm

c) $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{AC} = 4$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm y $\overline{A'B'} = 4,2$ cm, $\overline{A'C'} = 5,6$ cm, $\overline{B'C'} = 7$ cm

RAZONES DE PERÍMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES.

- La **razón** de dos **longitudes correspondientes** en dos figuras semejantes coincide con la **razón de semejanza k**

Ejemplo. Halla la razón de semejanza de los perímetros de estos rectángulos:



Los rectángulos son semejantes, ya que sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados proporcionales.

La razón de semejanza es $k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$

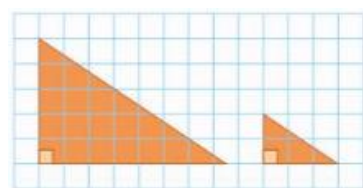
Los perímetros miden:

$$P_1 = 2 \cdot (6 + 3) = 18 \text{ cm} \quad \text{y} \quad P_2 = 2 \cdot (4 + 2) = 12 \text{ cm}$$

$$\text{La razón entre perímetros es } \frac{P_1}{P_2} = \frac{18}{12} = 1,5 = k$$

- La **razón** de las **áreas** de dos figuras semejantes coincide con el **cuadrado** de la **razón de semejanza, k^2**

Ejemplo. Halla la razón de semejanza de las áreas de los siguientes triángulos.



Los triángulos son semejantes ya que tienen un ángulo recto y los lados que lo forman son proporcionales.

La razón de semejanza es $k = \frac{7,5}{3} = \frac{5}{2} = 2,5$

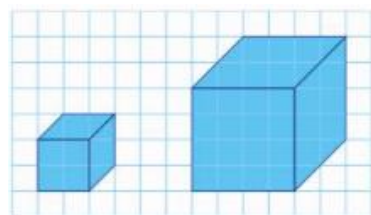
Las áreas de los triángulos son:

$$A_1 = \frac{7,5 \cdot 5}{2} = 18,75 \text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

$$\text{La razón entre áreas es } \frac{A_1}{A_2} = \frac{18,75}{3} = 6,25 = 2,5^2 = k^2$$

- La **razón** de los **volúmenes** de dos cuerpos semejantes coincide con el **cubo de la razón de semejanza, k^3**

Ejemplo. Halla la razón de semejanza de los volúmenes de los siguientes cubos.



Los cubos son semejantes ya que las distancias entre dos puntos correspondientes cualesquiera son proporcionales.

La razón de semejanza de las aristas es $k = 2$

Los volúmenes son: $V_1 = 2^3 = 8 \text{ cm}^3$ y $V_2 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$

La razón entre volúmenes es $\frac{V_2}{V_1} = \frac{64}{8} = 8 = 2^3 = k^3$

- El perímetro de un hexágono regular mide 36 cm. ¿Cuál será el perímetro de otro hexágono regular si la razón de semejanza entre ambos es 5?
- El área de un cuadrado es de 16 cm^2 . ¿Cuál será el área de otro cuadrado si la razón de semejanza entre ambos cuadrados es 2?

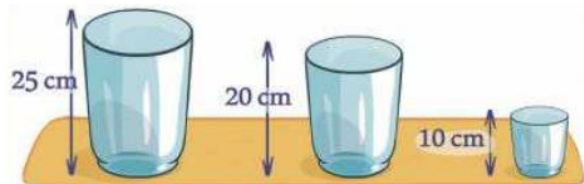
9. El volumen de una pirámide es de 125 cm^3 . ¿Cuál será el volumen de otra pirámide semejante a esta si la razón de semejanza es 2,5?

10. Jorge y Elena han preparado un cartel de $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ para anunciar la fiesta de final de curso. Como piensan que les ha quedado un poco pequeño, hacen una fotocopia ampliada un 25%.

a) Halla las nuevas dimensiones del cartel.

b) Comprueba que la relación de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

11. Una vajilla contiene tres tipos de vasos de diferentes tamaños, pero semejantes entre sí.



a) Calcula las razones de semejanza entre el vaso grande y el mediano y entre el vaso mediano y el pequeño.

b) Si el vaso mediano tiene un volumen de 256 cm^3 , calcula los volúmenes de los otros dos vasos.

MAPAS, PLANOS Y MAQUETAS. ESCALAS

- Un **mapa** es la representación gráfica de una zona geográfica
- Un **plano** es la representación gráfica de otro tipo de elementos tales como una vivienda o una ciudad
- Una **maqueta** es la representación reducida de cualquier objeto, como un edificio, un avión, un automóvil, etc.
- La **escala** de un plano, mapa o maqueta es la razón de semejanza entre la representación de la zona u objeto y la realidad.

$$E = \frac{\text{Distancia en la representación}}{\text{Distancia en la realidad}}$$

La escala de un mapa, plano o maqueta se puede expresar mediante una **relación de proporcionalidad numérica** o mediante una **representación gráfica**.

Ejemplo. En un mapa hemos comprobado que 5 cm en el mapa corresponden a 15 km en la realidad.

Por tanto, la escala numérica es $E = \frac{5}{1.500.000} = \frac{1}{300.000} \Rightarrow E = 1 : 300.000$.

La escala gráfica correspondiente a este mapa vendría representada por la siguiente regla graduada:



Quiere decir que cada porción de distancia igual a una de las divisiones de dicha regla representa 3 km de la realidad.

12. La longitud de una furgoneta en la realidad es de 4,2 metros.

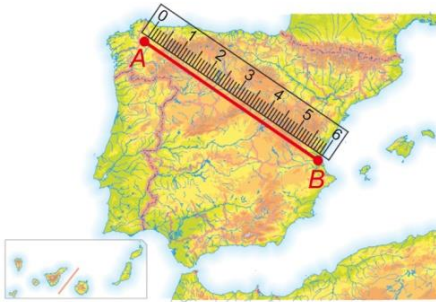
a) ¿Cuál será su longitud en una maqueta a escala 1:200?

b) ¿Y a escala 1:500?

c) Si tenemos una maqueta de la furgoneta que mide 6 cm de longitud, ¿a qué escala está representada?

13. Calcula la distancia real entre Lugo, que se encuentra situado en A , y Valencia, que está en B , teniendo en cuenta la escala que se muestra en el mapa y que la división más pequeña de la regla es el milímetro.

Escala 1:14:000.000



14. En un plano con una escala de 1:40, ¿cuáles serán las medidas de una mesa de 1,20 metros de largo y 0,90 metros de ancho?

15. Calcula la escala del siguiente mapa sabiendo que el campo de fútbol que se ve en la figura mide 110 metros de largo en la realidad y que la división más pequeña de la regla es el milímetro. ¿Qué distancia hay entre A y B en la realidad, si en este plano es de 5 centímetros?



16. Determinar las dimensiones que tendrá una casa rectangular en un plano a escala 1:50, si en la realidad su largo mide la mitad de su ancho y su área es de 72 m^2 .
17. Una bacteria tiene un diámetro aproximado de 2,5 millonésimas de metro y, con un microscopio, se ve con un diámetro de 1,5 cm. Calcula cuántos aumentos tiene el microscopio.
18. Calcula las dimensiones que tendrá un zapatero de miniatura si queremos hacerlo semejante a otro cuyas dimensiones son $120 \times 90 \times 45$ (altura \times ancho \times profundidad) centímetros, de forma que la altura sea 12 centímetros.